



معادله‌ی خط و رسم خط

قسمت اول

حمیدرضا امیری

برای دانش آموزان سال سوم راهنمایی

است که طول هر کدام قرینه‌ی عرض آن‌هاست و یا عرض آن‌ها قرینه طولشان است.

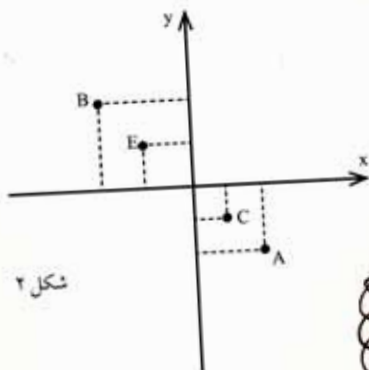
آیا نقاط زیر جزو این مجموعه نقاط از صفحه هستند؟

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

چند نقطه‌ی دیگر می‌توانید بنویسید که بین طول و عرض آن‌ها رابطه‌ی $y = -x$ برقرار باشد؟ حال اگر نقاط A, B, C, D و E را روی محورهای مختصات رسم کنیم (مطابق شکل ۲)، مشاهده می‌شود که همگی آن‌ها روی یک امتداد هستند و می‌توان خطی رسم کرد که از همه‌ی آن‌ها عبور کند. اگر این خط را رسم کنیم، در حقیقت نمودار خط $y = -x$ را رسم کرده‌ایم (شکل ۳).



شکل ۲



می‌دانیم که اگر دو محور عمود بر هم، با مبدأ مشترک در صفحه رسم کنیم، هر نقطه‌ی واقع در صفحه را می‌توان توسط دو مقدار که یکی نشان‌دهنده‌ی طول آن نقطه و دیگری عرض آن نقطه است، مشخص کرد.

این دو محور در واقع صفحه‌ی مختصات دکارتی را به چهار ناحیه تقسیم می‌کنند که علامت طول و عرض هر نقطه در هر یک از این چهار ناحیه یا چهار ربع در شکل ۱ مشخص شده است.



شکل ۱

برای مثال در ناحیه‌ی اول، هر نقطه دارای طول و عرض مثبت است، و یا در ناحیه‌ی چهارم، طول هر نقطه مثبت و عرض آن منفی است.

گاهی در صفحه‌ی دکارتی به نقاطی برمی‌خوریم که بین طول و عرض آن‌ها رابطه‌ی خاصی برقرار است. به عبارت دیگر، بین x و y رابطه‌ای برقرار است که با داشتن مختص x می‌توان y را حدس زد یا برعکس. اگر عرض نقطه‌ی y را داشته باشیم، می‌توانیم توسط آن رابطه، طول نقطه یعنی x را به راحتی به دست آوریم. مثلاً اگر به ما بگویند بین مختصات مجموعه‌ی نقاطی از صفحه رابطه‌ی $y = -x$ برقرار است، آیا می‌توانیم این مجموعه‌ی نقاط را بیابیم؟ جواب مثبت است. رابطه‌ی بالا به ما می‌گوید، نقاطی موردنظر

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ب) $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

تا این جا مشاهده شد که:

الف) اگر دو نقطه از یک خط معلوم باشد، با اتصال آن‌ها به یکدیگر توسط یک پاره خط و امتداد آن پاره خط و امتداد آن پاره خط از طرفین، به خطی که از آن دو نقطه می‌گذرد و یا نمودار خط دست پیدا کرده‌ایم.

ب) اگر رابطه‌ی بین طول و عرض نقاط واقع روی یک خط را معلوم کنند، به راحتی می‌توان با مشخص کردن مختصات دو نقطه از مجموعه نقاط روی خط، طبق آن چه در قسمت الف گفته شد، خط را رسم کرد. البته گاهی رابطه‌ی بین x و y با توجه به مختصات نقاط داده شده به دست می‌آید (مانند تمرین قبل) و گاهی نیز رابطه‌ی بین x و y با به عبارت دیگر معادله‌ی خط به ما داده می‌شود؛ مانند مثال زیر.

مثال ۲. معادله‌ی خط L به صورت $y = \frac{1}{3}x$ مفروض است.

این خط را روی محورهای مختصات رسم کنید.

بنابر آن چه در قسمت الف گفته شد، برای رسم خط به دو نقطه از این خط نیاز داریم و برای یافتن مختصات دو نقطه از خط، با توجه به معادله‌ی خط که رابطه‌ی بین x و

y در همه‌ی نقاط واقع روی

خط را برای ما مشخص

می‌کند، کافی است به x مقدار

بدهیم (عددی به جای x قرار

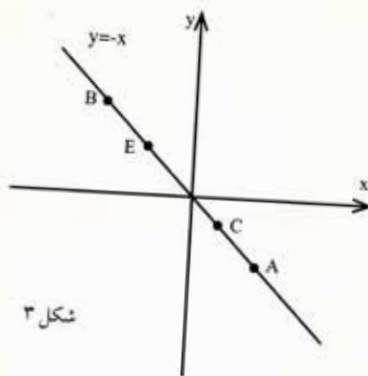
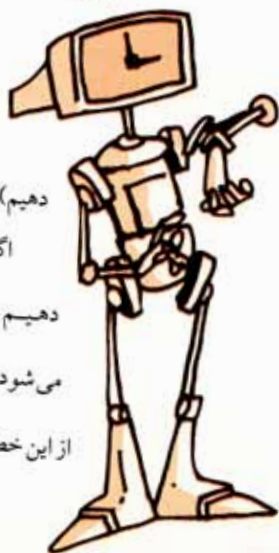
دهیم) تا مقداری برای y حاصل شود.

اگر در معادله‌ی $y = \frac{1}{3}x$ ، قرار

دهیم: $x=3$ ، مقدار $y=1$ حاصل

می‌شود. لذا نقطه‌ی $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ یک نقطه

از این خط است. و اگر قرار دهیم $x=-3$ ،



شکل ۳

به رابطه‌ی $y = -x$ معادله‌ی خط L گفته می‌شود.

مثال ۱. با توجه به شکل ۴، اگر دو نقطه‌ی $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ و

$B = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}$ را به هم وصل کنیم و امتداد دهیم، خط L_1 حاصل

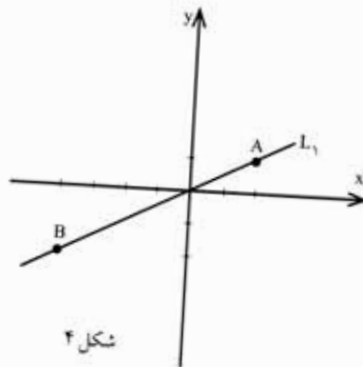
می‌شود (توجه دارید که از دو نقطه فقط یک خط راست می‌گذرد).

برای نوشتن معادله‌ی خط L_1 کافی است رابطه‌ی بین x و y را با توجه به مختصات دو نقطه‌ی A و B به دست آوریم.

همان طور که مشاهده می‌کنید، در هر دو نقطه همواره $x = 2y$

یا $y = \frac{1}{2}x$ در واقع، معادله‌ی خط L_1 را به دست آورده‌ایم که

عبارت است از: $y = \frac{1}{2}x$



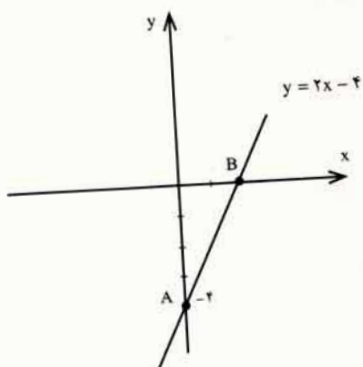
شکل ۴

تمرین: در هر یک از حالت‌های زیر مختصات نقاط A و B داده شده‌اند. اولاً مختصات نقطه‌ی C را به نحوی تکمیل کنید که خط L از آن سه نقطه عبور کند. ثانیاً معادله‌ی خطی را که از سه نقطه‌ی A ، B و C عبور می‌کند، به دست آورید.

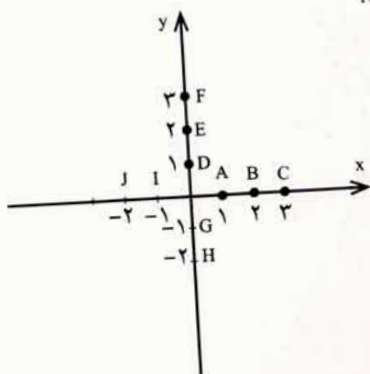
الف) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \end{bmatrix}$

x	۳	$\frac{1}{3}$
y	۴

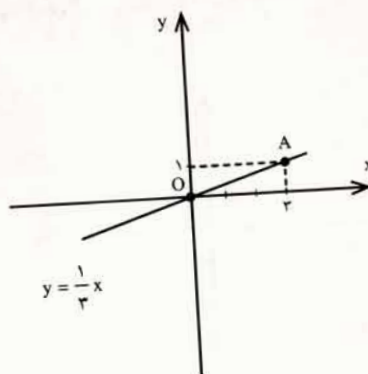
ملاحظه می کنید که اگر در معادله ی خط به جای x صفر قرار دهیم، برای y مقدار -4 به دست می آید. حال اگر این نقطه را A بنامیم، داریم $A = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix}$. از طرف دیگر، اگر به جای y صفر بگذاریم، مقدار $x=2$ حاصل می شود و اگر این نقطه را B بنامیم خواهیم داشت: $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. همین دو نقطه برای رسم خط کافی هستند. اکنون مشاهده خواهید کرد که این خط و در حالت کلی، هر خطی که معادله ی آن به شکل $y = ax + b$ باشد، از مبدأ عبور نمی کند و همواره دو محور x ها و y ها را قطع می کند.



نکته ی مهم ۲. همان طور که می دانید، هر نقطه روی محور x ها واقع باشد، فاصله اش تا مبدأ مختصات، طول نقطه ی مورد نظر است و همواره عرضش صفر است. هم چنین، اگر نقطه ای روی محور y ها واقع باشد، فاصله اش تا مبدأ، همان عرض نقطه و طولش صفر خواهد بود. به شکل زیر توجه کنید.



مقدار -1 حاصل می شود. البته می توانستیم مقدار $x=0$ را در معادله قرار دهیم تا $y=0$ حاصل می شود؛ یعنی نقطه ی $O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ که مبدأ مختصات را نشان می دهد. حال پس از تعیین نقاط حاصل روی صفحه ی مختصات، آن ها را به هم وصل می کنیم و امتداد می دهیم.



نکته ی مهم ۱. همان طور که مشاهده کردید، اگر معادله ی یک خط به صورت $y = ax$ باشد، همواره با قرار دادن $x=0$ مقدار $y=0$ حاصل می شود. به عبارت دیگر، تمام این خطوط حتماً از نقطه $O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ، یعنی مبدأ مختصات عبور می کنند. لذا از این پس اگر با

معادله ی خطی به صورت فوق مواجه شدیم که رسم آن از ما خواسته شده بود، با خیال راحت می گوئیم آن خط از مبدأ مختصات عبور می کند. پس کافی است فقط مختصات یک نقطه ی دیگر از خط را مطابق آن چه در مثال قبل دیدید، بیابیم و مبدأ مختصات را به آن نقطه وصل کنیم و امتداد دهیم.

حتماً سؤال خواهید کرد: اگر خطی از مبدأ مختصات عبور نکند، آیا برای رسم آن نیز می توان از روش قبل، یعنی استفاده از مختصات دو نقطه استفاده کرد یا خیر؟

جواب مثبت است. یعنی در هر حالت برای رسم یک خط می توان با یافتن دو نقطه از آن، خط مورد نظر را رسم کرد. بدین ترتیب که دو نقطه را به هم وصل می کنیم و از دو طرف امتداد می دهیم. به مثال دیگری توجه کنید:

مثال ۳. معادله ی خط L به صورت $y = 2x - 4$ مفروض است. ابتدا جدول زیر را تکمیل کنید. سپس نمودار این خط را روی صفحه ی مختصات دکارتی بکشید.

حالت با توجه به شکل و نکته‌ی فوق، مختصات نقاط زیر را تکمیل کنید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

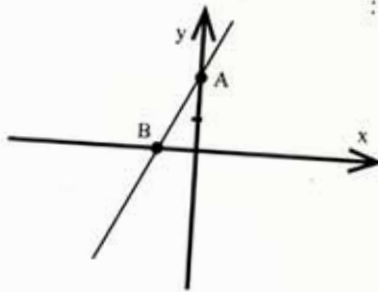
محل برخورد با محور عرض‌ها

$$\text{اگر } x=0 \rightarrow y=2 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

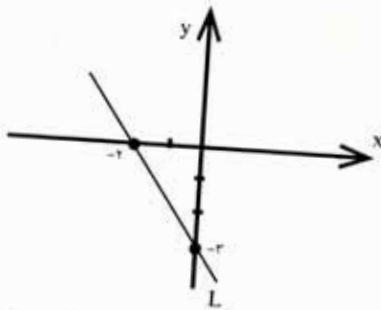
محل برخورد با محور طول‌ها

$$\text{اگر } y=0 \rightarrow x=-\frac{2}{3} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین:



مثال ۵. خط L محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول ۲- و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۳- قطع می‌کند. این خط را پس از مشخص کردن دو نقطه رسم کنید.



درباره‌ی وضعیت دو خط نسبت به هم (موازی یا متقاطع) و نیز این‌که آیا با داشتن دو نقطه از خط می‌توان معادله‌ی خط را نوشت و یا حالت‌های دیگر برای نوشتن معادله‌ی خط و انواع دیگر خط، در مقاله‌ای جداگانه در شماره‌ی آینده بحث خواهیم کرد. ■

بی‌نوشت

- چون اولین بار دکارت، ریاضی‌دان فرانسوی، آن را برای نقاط مختلف در نظر گرفت و از روش محورهای مختصات استفاده کرد، صفحه‌ی مختصات دکارتی به پادوی نام‌گذاری شده است.

نتیجه‌ی مهم ۳. هرگاه بخواهیم نمودار خط L به معادله‌ی $y = ax + b$ را رسم کنیم، با توجه به نکته‌ی قبل و با دانستن آن‌که این خط هر دو محور را قطع می‌کند، کافی است محل برخورد خط با دو محور x و y را به دست آوریم و آن را رسم کنیم. از طرف دیگر می‌دانیم، محل برخورد خط L با محور x نقطه‌ای است که روی محور x قرار دارد و همواره عرض آن صفر است. لذا برای یافتن مختصات این نقطه کافی است در معادله‌ی خط قرار دهیم: $y = 0$ که مقدار $x = -\frac{b}{a}$ حاصل می‌شود.

هم‌چنین، محل برخورد این خط با محور y نقطه‌ای است که طول آن صفر است. لذا برای یافتن مختصات این نقطه کافی است در معادله‌ی خط قرار دهیم: $x = 0$ که مقدار $y = b$ حاصل می‌شود.

پس $A = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$

مختصات محل برخورد خط با محور yها و نقطه‌ی

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{b}{a} \\ 0 \end{bmatrix}$$

برخورد خط با محور xها خواهد بود.

مثال ۴. معادله‌ی خط

$$L \text{ به صورت } y = 3x + 2$$

داده شده است. این خط را

رسم کنید.

